1 Slunečnice

Příklad 1:

Nechť $V_1, \cdots, V_s$ jsou disjunktní $(k-1)$-prvkové množiny a nechť F je systém s-prvkových množin S_j, t.ž., $|S_j \cap V_i| = 1$ pro každé i, j. Kolik množin tvoří F? Ukažte, že F nemá slunečnici s k lístky.

Nápověda:

Řešení:

Množina z F si do každé V_i sáhne právě jednou, tedy počet možností výběru je $(k-1)^s$. Pro spor mějme slunečnici s k lístky. Vezměme lístek L a nějakou jeho nesdílený prvek $x \in V_i$. Ostatní lístky musí také sáhnut do V_i a každý musí mít unikátní prvek. Tedy celkem musí mít V_i alespoň k prvků a to je spor.

Příklad 2:

Nechť $n - k + 1 < s \leq n$ a nechť F je systém všech s-prvkových podmnožin množiny $[1, n]$. Dokažte, že F nemá slunečnice s k lístky.

Nápověda:

Co když má lístky jen velikosti 1?

Řešení:

Nechť máme slunečnici S s k lístky. Každý lístek musí mít alespoň jeden prvek, který nepatří žádnému jinému. Označme tedy počet prvků, které jsou jen v jednom lístku $l \geq 1$. Disjunktními kusy lístků se pokryje lk prvků. Na střed slunečnice tedy zbývá nejvýše $n - lk$ prvků. Teď dvěma způsoby odhadneme součet velikostí $|S|$ množin v S.

$$\begin{aligned}
k(n-k+1) &< |S| = k(n-lk) + lk \\
k(-k+1) &< k(-lk) + lk \\
-k^2 + k &< -lk^2 + lk \\
(l-1)k^2 - (l-1)k &< 0 \\
(l-1)k(k-1) &< 0
\end{aligned}$$

A dostáváme spor.

Příklad 3:

Nechť F je systém podmnožin množiny $[1, n]$, ve kterém se každé dvě podmnožiny protínají. Nalezněte optimální horní odhad na velikost F.

Nápověda:

Je potřeba dokázat existenci nějakého velké systému podmnožin a pak ukázat, že žádný nemůže být větší.

Řešení:

Určíme jeden prvek - búno například 1. Ten odebereme, vezmeme všechny podmnožiny $[2, n]$. Ke každé přidáme prvek 1, který tak bude v průniku všech. Tím získáme odhad 2^{n-1} vzájemně se protínajících podmnožin $[1, n]$.
Snadno se ověří, že pokud systém podmnožin obsahuje prvek v průniku všech, jeho

velikost je nejvýše 2^{n-1}. Nyní mějme systém množin, který neobsahuje prvek v průniku všech. Všimneme si, že pokud $X \in F$, pak doplněk X není v F. Vyberu si jeden libovolný prvek. Například 1. Vytvoříme systém množin F'. Pokud $1 \in X \in F$, pak dám X do F'. Pokud $1 \notin X \in F$, pak dám doplněk X do F'. F' je opět systém protínajících se množin, navíc má stejnou velikost jako F. Tedy i $|F| = |F'| \leq 2^{n-1}$.
Jednodušší možnost jak argumentovat je říci, že v F nemůže být najednou množina i její doplněk. Tedy se všech podmnožin $[1, n]$ jich může být v F nejvýše polovina a to je 2^{n-1}.

Příklad 4:

Turnánův graf $T^k(n)$ je úplný r-partitní graf na n vrcholech, kde se vlikost partit liší maximálně o 1. Jedná se o zobecnění bipartitního grafu. Počet hran $T^k(n)$ označme jako $t_k(n)$. Ukažte, ze hustota hran Turánova grafu se v limitě blíží $(k-1)/k$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} t_k(n)\binom{n}{2}^{-1} = \frac{k-1}{k}.$$

Pro poučení: hustota hran grafu je počet hran děleno počtem hran úplného grafu na stejném počtu vrcholů.

Nápověda:

$$t_k\left(k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right) \leq t_k(n) \leq t_k\left(k\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil\right)$$

Řešení:
