1 Ramseyovky

Příklad 1:

Určete hodnotu $R(K_3, 2K_3)$.

Nápověda:

Ověřte, že to je 8.

Řešení:

Že nestačí 7 je vidět z úplného bipartitního grafu $K_{2,5}$. Že stačí 8 je potřeba trochu rozebrat. Základní pozorování je, že na 6 vrcholech je vždy alespoň jeden monochrmatický trojúhelník. Druhé důležité je, že pokud na 5ti vrcholech není žádný monochromatický trojůhelník, tak je obarvení složené ze dvou monochromatických kružnic.
Řekněmě, že hledáme červený nebo dva modré trojůhelníky Snadno rozebereme, že musí existovat dva modré, které ale sdílejí vrchol (na 8 vrcholech musí být alespoň jeden modrý - červený být nesmí, když odeberu dva jeho vrcholy, tak stále musí být nějaký modrý. Pokud neobsahuje neodebraný vrchol, mám dva disjunktní modré). Tyto dva trojúhleníky zaberou 5 vrcholů. Když jeden z nich vyhodím, na zbytku není ani jeden monochromatický trojůhelník, takže to jsou dvě kružnice. Stejně když vyhodím druhý a pak už vím skoro o všech hranách a dorozebere se to snadno.

Příklad 2:

Určete hodnotu $R(sK_2, tK_2)$.

Nápověda:

Ověřte, že to je $2s+t-1$, kde $s \geq t$. Postupujte indukcí, kdy zvětšujete o jedna naráz s i t. Začněte s případem $R(sK_2, K_2) = 2s$.

Řešení:

Případ $R(sK_2, K_2) = 2s$ je skoro vidět. Teď trochu indukčního kroku. Umíme $R(sK_2, tK_2) = 2s+t-1$ a chceme ukázat, že $R((s+1)K_2, (t+1)K_2) = (2s+t-1)+3$. Mějme nějaké obarvení. Naleznu tři vrcholy u, v, w, že uv je modrá a uw je červená. Pokud je nemohu naleznout, je všechno jednobarevné a vítězím. Když je najdu, tak je odeberu, budu mít $2s+t-1$ vrcholů, na kterých existuje dle IP hodně modrých nebo červených hran. K nim pak přihodím hranu, která je v odstraněném trojúhelníku.

Příklad 3:

Ukažte, že $R(T_1, T_2)$, kde T_1 a T_2 jsou stromy, je lineární v počtu jejich vrcholů.

Nápověda:

Když budu mít graf s velkým minimálním stupněm, bde se v něm hledat indukovaný strom snadno. Pozorování: pokud mám graf s průměrným stupněm k, pak obsahuje podgraf s minimálním stupněm $k/2$.

Řešení:

Předpokládejme, že oba stromy mají stejně vrcholů. Uvažujme K_n. BÚNO červených hran je více. Tedy alespoň $n(n-1)/4$. Tedy červené indukuji graf průměrného stupně alespoň $(n-1)/2$. Z pozorování plyne, že máme podgraf minimálního stupně alespoň $(n-1)/4$. Pokud tedy strom bude mít nejvýše $n/4$ vrcholů, snadno (hladově) ho najdeme jako podgraf.

Příklad 4:

Ukažte, že pro libovolné obravení konečných podmnožin přirozených čísel konečně mnoha barvami existuje nekonečná množina X taková, že pro každé n, všechny n-prvkové podmnožiny X neobsahující prvních n prvků z X mají stejnou barvu.

Nápověda:

Hlavně se nebát hodně vyhazovat vrcholy. Princim holubníku - když mám nekonečně mnoho nějakých obarvených objektů konečně barvami, musí jich být nekonečne obarveno stejně. Rada pro trojice. Když chci trojice, tak mohu dvojici (a, b) obarvit barvou, která je se vyskytuje na nekonečně mnoho trojicích (a, b, c), kde $c > max\{a, b\}$.

Řešení:

Příklad 5:

Nechť K je úplných graf se spočetně nekonečně mnoha vrcholy, jehož hrany jsou obarveny dvěma barvami. Předpokládejme, že pro každá n, K obsahuje úplný graf na n vrcholech, jehož všechny hrany jsou červené. Obsahuje pak nutně K nekonečný úplný graf, jehož všechny hrany jsou červené?

Nápověda:

Ne

Řešení:

Vyrobí se disjunktní červené K_n různých velikostí a všechny ostatní hrany se udělají modré.

Příklad 6:

Nechť $K_{X,Y}$ je úplný bipartitní graf se spočetně nekonečně velkými partitami, jehož hrany jsou obarveny dvěma barvami. Je pravda, že pro každé n graf $K_{X,Y}$ musí nutně obsahovat monochromatický podgraf izomorfní $K_{n,n}$? Monochromatický úplný podgraf s jednou partitou velikosti n a druhou nekonečně velkou? Oběma nekonečně velkými?

Nápověda:

První dvě platí, třetí neplatí.

Řešení:

Řekněme, že dvě barvy jsou modrá a červená.
$K_{n,n}$ plyne z druhé části příkladu, ale lze říci i jinak. Ramseyova věta pro matice tvrdí, že pro n, k existuje N, že matice $N \times N$ s k různými prvky obsahuje konstantní podmatici velikosti $n \times n$. Aplikujeme tuto větu tak, že položíme $k = 2$ a pak si představíme, že řádky jsou indexované jednou partitou a sloupce druhou. Do matice vepíšeme barvy hran. Teď už stačí jen vzít z nekonečného grafu podgraf $K_{N,N}$ vrcholech a dle věty v něm najdeme monochromatický $K_{n,n}$.
Postupně budu z grafu odhazovat vrcholy z druhé partity tak, aby vrcholy v první partitě měly sousedy jen jedné barvy. Vezměme první vrchol v_1 v první partitě. Vede z něj nekonečně hran do druhé partity, tedy v barevě $c_1 \in \{\text{modrá, červená}\}$ jich je nekonečně. Z druhé partity se vyhodí vrcholy, které nejsou s vrcholem v_1 spojené barvou c_1. I po tomto brutálním prořezání je druhá partita nekonečně velká. Vrchol v_1 obarvíme barvou c_1 a pokračujeme vrcholem $v_2, \ldots, v_{2n-1}$. Z principu holubníku musí být mezi vrcholy $v_1, \ldots, v_{2n-1}$ alespoň n vrcholů stejné barvy. Ty ponecháme, vyhodíme ostatní prvky z první partity a tím jsme získaly hledaný monochromatický podgraf.
Obě nekonečné nelze. Například tak, že vrcholy v první partitě budou mít jen konečně modrých hran zatímco vrcholy v druhé jen konečně červených hran. Dělá se postupným barvením hran. Označme vrcholy v první partitě $v_1, v_2, \ldots$ a v druhé partitě $u_1, u_2, \ldots$.

Barvíme vrcholy v pořadí $v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots$. Při barvení hran u vrcholu obarvíme všechny dosud neobarvené hrany s ním incidentní. U v_i červenou barvou a u u_i modrou barvou.