1 Uspořádání a Ramsey

Příklad 1:

Zformulujte a dokažte kanonickou Ramseyovu větu pro matice.

Nápověda:

Něco jako že každá matice nad konečným tělesem obsahuje monochromatickou podmatici. Pro největší jendoduchost lze předpokládat, že matice obsahuje pouze 0,1.

Řešení:

Pro 0,1 matice s veliskoti $2^{2k-1}k \times 2k-1$ obsahuje monochromatickou podmatici $k \times k$. Půjdu postupně po sloupcích. V každém sloupci se podívám, která barva je na alespoň polovině políček. Řádky, které mají jinou barvy vyhodím. U každého sloupce zmenším počet řádků až na polovinu. Tedy celkem bude řádků $2^{2k-1}k2^{-2k+1} = k$. Navíc bude každý sloupec monochromatický. Alespoň polovina sloupcí jsou stejně monochromatické, ostatní vyhodíme. Tím dostáváme jednobarevnou matici $k \times k$.

Příklad 2:

Dokažte, že každá posloupnost $nm+1$ čísel obsahuje nerostoucí podposloupnost délky $n+1$ nebo neklesající podposloupnost délky $m+1$. Dokažte, že toto tvrzení neplatí pro posloupnost délky nm.

Nápověda:

Převeďte na Dilworthovu větu (maximální velikost antiřetězce je rovna minimálnímu počtu pokrývajících řetězců.) Pro mn nalezněte jeden příklad, kde to neplatí.

Řešení:

Na prvcích se definuje upořádání, že $a_i \prec a_j$, pokud $i < j$ a $a_i < a_j$. Řetězce v takovém upořádání odpovídají rostoucím posloupnostem a antiřetězce klesajícím. Z D. věty pak máme, že pokud je nejdelší řetězec n, tak jim potřebujme alespoň $m+1/n$, tedy antiřetězec bude délky $m+1$.
Nestačí mn - udělá se n rostoucích posloupností délky m a to takových, že posloupnost ma všechny prvky větší, než všechny následující posloupnosti. Tyto posloupnosti se dají za sebe a je to. Příklad pro $m = n = 3$: $7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3$.

Příklad 3:

Nalezněte obarvení přirozených čísel dvěma barvami, které neobsahuje nekonečně dlouhou monochromatickou aritmetickou posloupnost. (můžete zkusit i geometrickou posloupnost)

Nápověda:

Nějak zajistit, že člověk zabije všechny - klidně jednu po druhé.

Řešení:

Třebas budeme střídat délky barevných úseků jako $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$. Pro každou aritmetickou posloupnost, která má roste o k se dostaneme s úsekem k délce k a pak dva po sobě jdoucí úseky už vždy vynutí změnu barvy pro onu aritmetickou posloupnost.

Příklad 4:

Dokažte, že průnikové grafy grafů reálných spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $[0, 1]$ jsou perfektní.

Nápověda:

Zkuste se podívat, jak rozdělí rovinu grafy funkcí, které tvoří maximální kliku. Případně převést na grafy částeečných uspořádání.

Řešení:

Jde zkusit to převodem na něco, o čem víme, že je třída perfektních grafů. Například grafy částečných uspořádání. Uspořádání vyrobím tak, že $f < g$ pokud g je nad f. Potom řetězce tvoří nezávislé množiny a klika odpovídá antiřetězci. Neb jsou navíc perfektní grafu uzavřené na doplňky, tak to celé vyjde.

Další alternativní možnost je indukcí dle počtu hran. Do tří hran se snadno ověří. Řekneme, že funkce f je nad g, pokud v každém $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in [0, 1]$. Vezměme graf G, který je průsečíkovým grafem funkcí. Dále v něm vezmeme maximální kliku K. Vyrobíme umělou funkci k_1, která kopíruje dolní obálku funkcí z K a funkci k_2, která kopíruje horní obálku. Důležité pozorování je, že žádná funkce mimo K nemůže protnout k_1 i k_2 - pokud by se tak stalo, nalezli jsme větší kliku. Graf G rozdělíme na dva grafy G_1 a G_2. Do G_1 dáme vrcholy, jejichž na jednom z krajů nad k_1 a do G_2 vrcholy, jejichž funkce jsou pod k_2. Všimni si, že průnik může obsahovat víc, než jen vrcholy z K. Je potřeba si uvědomit, že grafy funkcí, které padnou do různých G_i a ve sjednocení se protnou mají různou barvu - obrázek pro spor napoví.

Může se však stát, že $G_1 = G$ nebo $G_2 = G$. V takovém případě zkusíme vzít jinou maximální kliku. Pokud pro všechny maximální kliky platí, že $G_1 = G$ nebo $G_2 = G$, pak bychom chtěli tvrdit, že mohou být maximálně dvě - K_1 a K_2. A to tak, že jedna je "nahoře" a druhá "dole". Tedy jednou je $G_1 = G$ a podruhé $G_2 = G$. V takovém případě naleznu dva nesousední vrcholy $x \in K_1$ a $y \in K_2$ (či jeden vrchol společný oběma klikám). Vrcholy odeberu, čímž mi klesne klikovost a tudíž i barevnost. Obarvím z indukce a obarvení rozšířím na obarvení pro G tak, že odebrané vrcholy dostanou novou barvu.

Příklad 5:

Nalezněte částečně uspořádanou množinu, která neobsahuje nekonečný antiřetězec, ale kterou není možné pokrýt konečně mnoha řetězci.

Nápověda:

Řešení:

Vyrobíme nekonečný Hasseův diagram D. Nejprve si připravíme gadget G_n. Ten má tři hladiny a $n + 2$ prvků. V nejnižší hladině je jeden prvek x_n, který je nejmenší (menší než všechny ostatní). V druhé hladině je n vzájemně neporovnatelných prvků $X_n = \{x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^n\}$ a ve třetí hladině je jeden největší prvek y_n. Výsledný diagram D sestavíme z $G_i, i \in \mathbb{N}$ tak, že y_i zidentifikujeme s x_{i+1}.

Graf nemá nekonečný antiřetězec, neb prvky y_i a x_i jsou porovnatelné se všemi ostatními a prvky x_i^j jsou neporovnatelné jen v rámci odpovídajícího X_i. Tedy všechny antiřetězce jsou konečné.

Pro spor nechť lze D pokrýt pomocí k řetězců. Potom ale z X_{k+1} každý řetězec pokryje nejvýše jeden prvek a tudíž alespoň jeden zůstal nepokrytý.
