1 Rovinné grafy

Příklad 1:

Ukažte, že nakreslení rovinného 3-souvislého grafu je (kombinatoricky) jednoznačné.

Nápověda:

Kombinatorická jednoznačnost lze říci tomu, že vrchol vidí své sousedy vždy ve stejném cyklickém pořadí, až na zrcadlení. Pak ještě potřeba ukázat, že zrcadlení je určené podle orientace jednoho vrhcolu už jednoznačně. Také pomohou Mengerovy věty (o k-souvislých grafech a disjunktních cestách).

Řešení:

Nejprve ukážeme jednoznačnost cyklického pořadí. Mějme nakreslený rovinný 3-souvislý graf G. U vrcholu stupně 3 není co řešit, tedy mějme vrchol v stupně alespoň 4. Pro každou čtveřici jeho sousedů ukážeme, že jejich pořadí je pevně dané. Nechť a, b, c, d jsou sousedi a jsou v tomto cyklickém pořadí. Označme $U = \{a, b\}$ a $V = \{c, d\}$. Vyhoďme v z G. Získáme 2-souvislý graf. Mengerova věta říká, že v k-souvislém grafu pro dvě množiny velikosti k existuje k vrcholově disjunktních cest spojující vrcholy z obou množin. V našem případě to říká, že existují disjunktní cesty $a - c$ a $b - d$ nebo $a - d$ a $c - b$. Všimni si, že první možnost není rovinná, tedy nastáva druhá možnost. A tím se fixuje část převracení. Obdobně použijeme na $U = \{a, c\}$ a $V = \{b, d\}$ a tím získáme pevné cyklické pořadí celé čtveřice - lze jen celé převrátit.
Nyní máme pevné pořadí u vrcholů, ale ještě by se mohlo stát, že se některé vrcholy převrací a některé nikoli. Vezměme vrchol u, který má nějaké pořadí sousedů. Chceme ukázat, že i jeho sousedé už mají dané, v jak vidí své sousedy. Užijeme stejný trik s Mengerem. Nechť v je soused u. Sousedi u, kteří jsou cyklicky vedle v označme u_1 a u_2. Sousedy v, kteří jsou cyklicky vedle u označme v_1 a v_2. Pak stačí $U = \{u_1, u_2\}$ a $V = \{v_1, v_2\}$ a to nám určí, které převrácení sousedů u v se musí použít.

Příklad 2:

Ukažte, ze každý rovinný graf má nakreslení, v němž všechny hrany jsou přímé, tj., úsečky.

Nápověda:

Recykluj důkaz Kuratowského věty.

Řešení:

Můžeme předpokládat, že graf je triangulace. Pokud není, tak prostě přidáme nějaké hrany aby byl a po nakreslení je zase vyhodíme. Pak bychom mohli vypozorovat, ze graf už je 3-souvislý nebo to je trojúhelník, který jistě úsečkové nakreslení má.
Při kreslení 3-souvislého grafu použijeme, že K_4 má úsečkové nakreslení. jako začátek indukce. Dále uděláme indukci podle hrana, jejíž konstrakce zachová 3-souvislost. Rozkontrahujeme a vrcholy nakreslíme dostatečně blízko sebe - pak odpovídající hrany mohou být stále rovné.

Příklad 3:

Nalezněte zakázané minory pro rovinné grafy.

Nápověda:

K_5, $K_{3,3}$

Řešení:

Chci ukázat, že graf obsahuje podrozdělení K_5, $K_{3,3}$ právě tehdy když obsahuje K_5, $K_{3,3}$ jako minor. Pro graf $K_{3,3}$ je obsahova minor a podrozdělení to samé, protože má maximalní stupeň 3. Pokud obsahuje podrozdělení K_5, tak tím spíš bude obsahovat minor K_5. Jediná zajímavá možnost je tedy, že graf obsahuje jako minor K_5, ale neobsahuje podrozdělení K_5.
Mějme graf s K_5 minorem. Ten tvoří 5 množin vrcholů $V_1, \dots, V_5$. Pro každou dvojici V_i, V_j si vyberu jednu hranu, která jde mezi nimi (alespoň jedna existovam musí, protože minor) a ostatní hrany mezi zahodím. V každém V_i si vyberu vrcholy, které jsou incidentní s alespoň jednou hranou a propojím je pomocí hran a vrcholů ve V_i v strom. Nechám stromy a ostatní zahodím. Pokud všechny V_i obsahují vrchol stupně 4, pak má K_5 minor. Tedy búno V_1 má dva vrcholy u, v stupně 3. Búno podrozdělené hrany z u vedou V_2 a V_3. Z v vedou do V_4 a V_5. Snadno se ukáže, že ve V_2 existuje vrchol, z něhož vedou podrozdělené hrany do u, V_4 a V_5 - doporučeno nakreslit si obrázek. Obdobně pro další V_i. Teď nalezneme podrozdělení $K_3, 3$ bude mít partity u, V_4, V_5 a v, V_2, V_3.

Příklad 4:

Dokažte, že graf je vnějškově rovinný pravě tehdy když neobsahuje podrozdělení K_4 a $K_{2,3}$ jako podgraf. Dodejme, že graf je vnějškově rovinný, pokud existuje jeho nakreslení do roviny takové, že všechny vrcholy jsou incidentní s vnější stěnou.

Nápověda:

Přidej apexový vrchol (vrchol spojený se všemi ostatními).

Řešení:

Mějme graf G, který neobsahuje K_4 a $K_{2,3}$. Vytvoříme z něj graf G' přidáním jednoho nového vrcholu v spojeného hranou se všemi ostatními. Graf G' neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$. Tudíž je rovinný a můžeme ho nakreslit tak, aby v byl incidentní s vnější stěnou. Pak stačí v odebrat a získáme nakreslení vnějškové rovinné nakreslení G, protože každý vrchol bude incidentní s vnější stěnou.
Ještě ukážeme druhou implikaci. Mějme vnějškově rovinný graf G. Chceme ukázat, že neobsahuje podrozdělení K_4 ani $K_{2,3}$. Sporem nechť obsahuje. Vezměme vnějškové rovinné nakreslení G a do vnější stěny přidejme vrchol v spojený se všemi vrcholy grafu G. Výsledný graf bude rovinný. Navíc ale bude obsahovat podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$ a to je spor s Kuratowského větou, že rovinné grafy neobsahují podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.
