1 Tutteho polynom

Příklad 1:

Určete Tutteho polynom pro kružnici délky k.

Nápověda:

Použijte rekurzivní vztah pro výpočet Tutteho polynomu.

$$T_G = \begin{cases} xT_{G-e} & \text{pokud } e \text{ je most,} \\ yT_{G-e} & \text{pokud } e \text{ je smyčka,} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{pokud } e \text{ není ani most či smyčka.} \end{cases}$$

Dále pro graf bez hran platí $T_G = 1$.

Řešení:

V prvním kroku se použije poslední možnost. Tedy $T_{C_k} = T_{P_{k-1}} + T_{C_{k-1}}$. Přes vyhazování mostu zjistíme, že $T_{P_{k-1}} = x^{k-1}$. Také si všimneme, že předchozí rekurze se zastaví po provedení na bigon (dva vrcholy spojené dvěma hranami). Vznikne pak jeden vrchol smyčkou C_1, kde $T_{C_1} = y$. Celkem tedy $T_{C_k} = y + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$.

Příklad 2:

Určete Tutteho polynom pro dva vrcholy spojené k hranami.

Nápověda:

Použijte rekurzivní vztah pro výpočet Tutteho polynomu.

Řešení:

Označme dva vrcholy spojené k hranami B_k. Dále označme vrchol s k smyčkami jako L_k. V prvním kroku se použije poslední možnost. Tedy $T_{B_k} = T_{B_{k-1}} + T_{L_{k-1}}$. Přes vyhazování smyček zjistíme, že $T_{L_{k-1}} = y^{k-1}$. Také si všimneme, že předchozí rekurze se zastaví po provedení na bigon (dva vrcholy spojené dvěma hranami). Vznikne pak cesta P_1 a použije se první pravidlo, kde vyjde $T_{P_1} = x$. Celkem tedy $T_{B_k} = x + y + y^2 + \cdots + y^{k-1}$.

Příklad 3:

Nechť G je rovinný graf a G^* jeho duál, pak $T_G(x, y) = T_{G^*}(y, x)$.

Nápověda:

Použijte rekurzivní vztah pro výpočet Tutteho polynomu.

Řešení:

Stačí si všimnout, že mosty v G odpovídají smyčkám v G^* a že smyčky v G odpovídají mostům v G^*.

Příklad 4:

Orientace grafu je totálně cyklická, pokud každá hrana leží v orientované kružnici. Dokažte, že graf G má $T_G(0, 2)$ totálně cyklických orientací.

Nápověda:

Použijte rekurzivní vztah pro výpočet Tutteho polynomu.

Řešení:

Označme $O(G)$ počet totálně cyklických orientací grafu G. Chceme Následující vztah

$$O(G) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } e \text{ je most,} \\ 2O(G-e) & \text{pokud } e \text{ je smyčka,} \\ O(G-e) + O(G/e) & \text{pokud } e \text{ není ani most či smyčka.} \end{cases}$$

Pro prázdný graf pak $O(G) = 1$. Ten vztah by přesně odpovídal dosazení 0 a 2 do Tutteho polynomu.
První dva kusy jsou jasné. Graf s mostem nemůže obsahovat totálně cyklickou orientaci díky mostové hraně. Naopak smyčku v grafu mohu zorientovat libovolným ze dvou možných způsobů a tedy počet orientací je 2-krát větší, než po odebrání smyčky. Smyčka také nemá žádný vliv na existenci orientace.
Pro poslední vztah je potřeba rozebrat několik případů. Mějme totálně cyklickou orientaci grafu G, že při otoční hrany e již totálně cyklickou nebude. Pak to bude dobrá orientace i pro G/e, ale v $G-e$ se nezapočítá. Pokud je možné hranu otočit, započte se jednou v G/e a jednou v $G-e$. Zde je potřeba si vyzkoušet, že pokud hrana je otočitelná, tak i po jejím odebrání je orientace stále totálně cyklická.
Víme tedy, že orientace z G se započtou. Ještě je potřeba zkusit, zda se nezapočte něco navíc.
Pokud je totálně cyklická orientace společná pro G/e a $G-e$, tak na orientaci hrany e nezáleží a lze ji vzít dvěma způsoby. Pokud orientace G/e je totálně cyklická ale pro $G-e$ není, pak nemohou obě orientace e tvořit totálně cyklickou orientaci. Může ji tvořit nejvýše jedna orientace. Když by ani jedna orientace nebyla vhodná, tak existují hrany f a f', které ve svém cyklu nutí opačné orientace hraně e. Pak se ale ukáže, že nenutí - malý rozbor případů.

Příklad 5:

Ukažte, že pokud je $G = (V, E)$ sjednocením grafů $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ sdílející nanejvýš jeden vrchol, pak $T_G = T_{G_1} T_{G_2}$.

Nápověda:

Lze použít rekurzivní definici i nerekurzivní, která je

$$T_G(x,y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)} = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{k(F)-k(E)} (y-1)^{n(F)},$$

kde $k(E)$ je počet komponent souvislosti, $n(E) := |E| - |V| + k(E)$ a $r(E) := |V| - k(E)$. Pro F je definice obdobná.

Řešení:

Rozlišíme dva případy. Zda je G_1 a G_2 sdílí vrchol či nikoli. Pokud nesdílí, budeme psát:

$$T_{G_1}(x,y) T_{G_2}(x,y) = \sum_{F_1 \subseteq E_1} (x-1)^{k(F_1)-k(E_1)} (y-1)^{n(F_1)} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{k(F_2)-k(E_2)} (y-1)^{n(F_2)} =$$

$$= \sum_{F_1 \subseteq E_1, F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{k(F_1)-k(E_1)+k(F_2)-k(E_2)} (y-1)^{n(F_1)+n(F_2)} =$$

Vypozorujeme, že $F_1 \subseteq E_1$, $F_2 \subseteq E_2$ můžeme nahradit $F \subseteq E$, protože $E = E_1 \cup E_2$. Dále si všimneme, že $k(F_1) + k(F_2) = k(F)$ a $k(E_1) + k(E_2) = k(E)$. Nakonec ještě zpozorujeme, že $n(F_1) + n(F_2) = |F_1| - |V_1| + k(F_1) + |F_2| - |V_2| + k(F_2) = |F| - |V| + k(F) = n(F)$. Tedy dostáváme

$$= \sum_{F\subseteq E} (x-1)^{k(F)-k(E)}(y-1)^{n(F)} = T_G(x,y)$$

.

Pokud G_1 a G_2 sdílí vrchol, první krok v rozepsání je stejný, ale budeme pozorovat, že: $|V| = |V_1| + |V_2| - 1$, $k(F_1) + k(F_2) = k(F) + 1$, $k(E_1) + k(E_2) = k(E) + 1$ a pro nulity $n(F_1)+n(F_2) = |F_1|-|V_1|+k(F_1)+|F_2|-|V_2|+k(F_2) = |F|+1-|V|-1+k(F) = n(F)$. Tedy opět dostáváme

$$= \sum_{F\subseteq E} (x-1)^{k(F)-k(E)}(y-1)^{n(F)} = T_G(x,y)$$

.

Příklad 6:

Použitím Tutteho polynomu určete pravděpodobnost, že graf vzniklý z G odebráním každé hrany s pravděpodobností p (nezávisle) je souvislý.

Nápověda:

Zkuste použít univerzální polynom a z něj pak vypadne Tutteho polynom. Také zkuste počítat pravděpodobnost, že počet komponent zůstane zachován. Pro souvislé grafy je to to samé, pro nesouvislé je pravděpodobnost stejnak 0.
Univerzální polynom $U_G(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)$ je

$$U_G = \begin{cases} \alpha^n & \textit{pokud } G \textit{ nemá hrany a má } n \textit{ vrholů,} \\ \beta U_{G-e} & \textit{pokud } e \textit{ je most,} \\ \gamma U_{G-e} & \textit{pokud } e \textit{ je smyčka,} \\ \delta U_{G-e} + \epsilon U_{G/e} & \textit{pokud } e \textit{ není ani most či smyčka.} \end{cases}$$

Dále platí, že $U_G(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon) = \alpha^{k(G)}\delta^{n(G)}\epsilon^{r(G)}T_G(\alpha\beta/\epsilon, \gamma/\delta)$.

Řešení:

Označme pravděpodobnost, že graf bude mít stejně komponent souvislosti po odebrání hran s pravděpodobností p pomocí P_G.

$$P_G = \begin{cases} 1 & \text{pokud } G \text{ nemá hrany} \\ (1-p)P_{G-e} & \text{pokud } e \text{ je most (nesmí se vyhodit),} \\ 1P_{G-e} & \text{pokud } e \text{ je smyčka (souvislot neovlivní),} \\ pP_{G-e} + (1-p)P_{G/e} & \text{pokud } e \text{ není ani most či smyčka.} \end{cases}$$

Tedy naše P_G můžeme napsat jako univerzální polynom $U_G(1,(1-p),1,p,(1-p))$. Pak vyjádřením přes Tutteho polynom sotaneme $p^{n(G)}(1-p)^{r(G)}T_G(1,1/p)$.
