Cvičení 6

1 Formule

Rozhodněte, pro které z množin

1. $M_1 = \{1\}$,
2. $M_2 = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
3. $M_3 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^i, \ldots\}$,
4. $M_4 = \{-3, 3, 15\}$

platí tvrzení:

1. $\forall x \in M \ \exists y \in M \ y > x$
2. $\exists y \in M \ \forall x \in M \ y \geq x$
3. $\forall x \in M$ (“x je sudé” $\vee$ “x je liché”)
4. ($\forall x \in M$ “x je sudé”) $\vee$ ($\forall x \in M$ “x je liché”)
5. $\forall x \in M \ \forall y \in M \ \exists z \in M \ z = x \cdot y$
6. $\exists x \in M \ \forall y \in M \ \exists z \in M \ x \cdot y = z$
7. $\exists x \in M \ \forall y \in M \ \exists z \in M \ y \cdot z \neq x$
8. $\exists a \in M \ \forall b \in M \ \exists c \in M \ b + c = a$
9. $\forall x \in M \ \exists y \in M \ \forall z \in M \ y \cdot z > x$

Najděte množiny M, pro které platí následující:

1. $(\forall x \in M \ \exists y \in M \ y > x)$ a zároveň $(\forall x \in M \ \exists y \in M \ y < x)$.
2. $(\exists x \in M \ \forall y \in M \ y \leq x)$ a zároveň $(\exists x \in M \ \forall y \in M \ y \leq x)$.
3. $\forall x \in M \ \forall y \in M \ x + y \neq 6$.
4. $\forall x \in M \ \forall y \in M \ x + y = 6$.
5. $(\exists x \in M \ \forall y \in M \ \exists z \in M \ x \cdot y = z)$, ale neplatí $(\forall x \in M \ \forall y \in M \ \exists z \in M \ z = x \cdot y)$.
6. $(\exists x \in M \ \forall y \in M \ y \geq x)$ a zároveň $(\forall a \in M \ \exists b \in M \ a + b = 6)$.

2 Důkaz přímý

1. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

3 Matematická indukce

1. Dokažte, že nerovnost
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$
platí pro všechna $n \geq 2$.

2. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro každé sudé n lze mřížku $3 \times n$ vydláždit dominovými kostkami 2×1.

3. Dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4 Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun.

4. Mezi 2^{n+1} přirozenými čísly lze vždy nalézt 2^n čísel, jejichž součet je dělitelný 2^n. *Vyložit, že při indukci nepřidáváme, ale ubíráme.*

5. Pomocí matematické indukce dokažte, že každá množina velikosti k má právě 2^k různých podmnožin. (Postupujte indukcí podle k.)

6. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1,\ldots,2^n)\times(1,\ldots,2^n)$, ve které chybí kus $(1,\ldots,2^{n-1})\times(1,\ldots,2^{n-1})$ vydláždit dílky tvaru L.

7. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1,\ldots,2^n)\times(1,\ldots,2^n)$, ve které chybí dílek na pozici $(1,1)$, vydláždit dílky tvaru L.

4 Důkaz sporem

1. Dokažte, že neexistuje nejmenší kladné racionální číslo.

2. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

3. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

4. Dokažte, že pomocí dílků tvaru L nelze vyplnit mřížku $(1,\ldots,2^n)\times(1,\ldots,2^n)$.

5 Důkaz obměnou

1. Dokažte pro všechna přirozená čísla n: jestliže číslo n^2+2 není dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné číslo n.