Cvičení 8

1 Důkaz sporem

Jak funguje. Úskalí: těžko poznat, co je hledaný spor a co je chyba.

1. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
2. Dokažte, že pomocí dílků tvaru L nelze vyplnit mřížku $(1, \ldots, 2^n) \times (1, \ldots, 2^n)$.
3. Dokažte, že rovnice $x^2 - y^2 = 1$ nemá žádné kladné celočíselné řešení.
4. Dokažte, že rovnice $x^3 + x + 1 = 0$ nemá žádné racionální řešení.
5. Pokud v trojúhelníku platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak je pravoúhlý.

2 Matematická indukce

Vysvětlit, jak přesně funguje (i pro jiné množiny než jenom $\mathbb{N}$, třeba všechna sudá čísla apod.) Varovat před "přidávací" metodou, správně "odebíráme" (do grafu velikosti n přidám vrchol vs. z grafu velikosti $n+1$ odeberu vrchol, ale grafy ještě neznají). To se ale vysvětluje blbě, protože u $\mathbb{N}$ to vyjde nastejno.

1. Dokažte, že nerovnost
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$
platí pro všechna $n \geq 2$.
2. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro každé sudé n lze mřížku $3 \times n$ vydláždit dominovými kostkami 2×1.
3. Dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4 Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun.
4. Pomocí matematické indukce dokažte, že každá množina velikosti k má právě 2^k různých podmnožin. (Postupujte indukcí podle k.)
5. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1, \ldots, 2^n) \times (1, \ldots, 2^n)$, ve které chybí kus $(1, \ldots, 2^{n-1}) \times (1, \ldots, 2^{n-1})$ vydláždit dílky tvaru L.
6. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1, \ldots, 2^n) \times (1, \ldots, 2^n)$, ve které chybí dílek na pozici $(1, 1)$, vydláždit dílky tvaru L.
7. Grayův kód je cyklická posloupnost n-tic z nul a jedniček, ve které se každá n-tice liší od předcházející v právě jedné pozici a každá n-tice z nul a jedniček se v posloupnosti vyskytuje právě jednou. Dokažte, že Grayův kód existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$.
8. Fibonacciho čísla definujme takto: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že počet způsobů, jak vydláždit mřížku $2 \times n$ dominovými kostkami 2×1 je roven F_{n+1}.
9. Dokažte, že každá dvě po sobě následující Fibonacciho čísla jsou nesoudělná.
10. Dokažte, že pro všechna $n \geq 1$ platí
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$