Kombinatorika a grafy III - 4.11. CV 3

Minory, stromová šířka a další mix

Příklad 1:

Dokažte, že každý graf na n vrcholech s maximální nezávislou množinou velikosti nejvýše a obsahuje $K_{n/2a}$ jako minor.

Nápověda:

Zkuste nejprve pro souvislé. Najdi nějakou "malou" množinu, kterou vidí každý jiný vrchol a tu odebe a užij indukci.

Řešení:

Začneme pro souvislý graf G. Budeme postupně konstruovat množiny vrcholů A a B, kde A bude nezávislá, B bude souvislá a $A \subseteq B$. Vezmeme libovoný vrchol v_1 a dáme do A i do B. Dokud existuje ve $V(G)$ vrchol nesousedící s žádným z vrcholů v A, vezmeme takový vrchol x, který je ve vzdálenosti 2 od A. Tedy existuje cesta ayx, kde $a \in A$ a $A \cup \{x\}$ je nezávislá. Do A přidáme x a do B přidáme x a y. Neb maximální nezávislá má velikost α, tak $|B| \leq 2\alpha - 1$. B bude tvořit jeden vrchol výsledného minoru, odeberme B, najdeme z indukce menší minor a B přidáme.
Pro nesouvislé uvážíme komponentu, kde je poměr n/α největší a v ní najdeme požadovaný minor.

Příklad 2:

Dokažte, že třetí vzdálenostní mocnina chordálního grafu je vždy chordální. Najděte příklad, že druhá mocnina chordální být nemusí. (pozn. Každá lichá mocnina je chordální.) Vzpomeň na větu, že chordální grafy jsou průnikové grafy podstromů ve stromě.

Nápověda:

Vzpomeň na větu, že chordální grafy jsou průnikové grafy podstromů ve stromě. Jak udělat v takové reprezentaci třetí mocninu?

Řešení:

Třetí mocnina odpovídá tomu, že se se v průnikové reprezentaci ke každému podstromu přidají podstromy, které s ním mají neprázdný průnik.

Příklad 3:

Dokažte, že každý k-spojovaný graf je (2k-1)-souvislý. Zopakujme, že graf je k-spojovaný, pokud pro každých k disjunktních dvojic vrcholů $\{\{x_i, y_i\}, 1 \leq i \leq k\}$ existují vrcholově disjunktní cesty P_i s konci x_i, y_i.

Nápověda:

Po odebrání $2k-2$ vrcholů otestujte souvislost.

Řešení:

Vyberu si $2k-2$ vrhoclů a nadělám z nich páry $\{\{x_i, y_i\}, 2 \leq i \leq k\}$. Za x_1 a y_1 pak mohu vzít libovolnou dvojici ze zbylých vrcholů a k-linkage zaručuje souvislost (existenci cesty).

Příklad 4:

Pro $t = 1, 2$ nalezněte nejmenší k, že každý k-souvislý graf je t-spojovaný. Drsňáci přemýšlí o $t = 3$.

Nápověda:

$t = 1, k = 1$ *a* $t = 2, k = 6$*?*

Řešení:

Pro $k = t = 1$ je asi jasné, že to platí.

- $t = 2, k = 2$ - protipříklad C_4
- $t = 2, k = 3$ - protipříklad W_4
- $t = 2, k = 4$ - protipříklad W_4, kde se prostřední vrchol nafoukne na K_4
- $t = 2, k = 5$ - protipříklad se dá také udělat

Pro $t = 2, k = 6$ nevím.
