

## Lineární algebra II - 7.5. CV 10

**Gramova-Schmidtova ortonormalizace** Hledání ortonormální báze (všechny prvky báze jsou navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost).

Vsupt: vektory  $u_1, \dots, u_n$

$$w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_i | v_j \rangle v_j$$

$$v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

Výstup: ortogonální báze  $v_1, \dots, v_n$

$i$ -tá souřadnice vektoru  $x$  vzhledem k ortonormální bazi  $v_1, \dots, v_n$  je  $\langle v_i | x \rangle$

---

I) V prostoru  $\mathbb{R}^4$  se standardním skalárním součinem  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$  určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi  $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r\}$  prostoru s bází

a)  $B = \{\mathbf{x}^T = (1, 1, 1, 1), \mathbf{y}^T = (4, 1, 4, 1), \mathbf{z}^T = (1, 2, 3, 4)\}$ .

b)  $B = \{(0, 3, 4, 0)^T, (0, 0, 5, 0)^T, (2, 1, 0, 2)^T\}$

,

c)  $B = \{(2, 4, 2, 1)^T, (-1, -2, -2, -1)^T, (1, 2, 4, 2)^T, (1, 2, 3, 4)^T\}$

---

II) Rozšiřte ortonormální bázi  $Z$  z předchozího příkladu na ortonormální báze  $\mathbb{R}^4$ .

---

III) Pro prostor z příkladu I) určete ortogonální projekci  $\mathbf{p}$  vektoru  $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$  a souřadnice této projekce  $[\mathbf{p}]_Z$  vzhledem k bázi  $Z$ .

---

IV) Určete vzdálenost bodu  $A = (5, 5, 3, 3)^T$  od roviny procházející počátkem a body  $B = (8, -1, 1, -2)^T$  a  $C = (4, -2, 2, -1)^T$ .

---

V) Najděte bazi ortogonálního doplňku prostoru  $W$  s bází  $B = \{(1 + i, 2, 0, -1)^T, (i, 1, -i, 2)^T\}$ . Řešte v  $\mathbb{C}^4$ .