

Lineární algebra II - 21.5. CV 12

Kvadratická forma $f(x)$ je zobrazení, které lze vyjádřit polynomem druhého stupně. Matice A je maticí kvadratické formy, pokud $f(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

Bilineární forma $f(x, y)$ je zobrazení, které lze vyjádřit polynomem druhého stupně, ale..... Matice A je maticí bilineární formy, pokud $f(x, y) = \mathbf{y}^T A \mathbf{x}$. Nelze doufat v symetrickou A .

Z matice kvadratické (bilineární) formy A_M vzhledem k bazi M získáme matici téže formy A_N vzhledem k bazi N takto:

$$A_N = [id]_{NM}^T \cdot A_M \cdot [id]_{NM}$$

. Všimni si, že při změně báze lineárního zobrazení se používá $[id]_{NM}^-$ a zde $[id]_{NM}^T$.

Pro každou kvadratickou formu existuje bze taková, že matice dané formy má na diagonále pouze prvny 1,0,-1. Navíc jejich počty jsou (pro jednu formu) vždy stejné (setrvačnost). Signatura formy je $(\#1, \# - 1, \#0) = (1, 1, 1)$. ($\#$ je počet)

I) Necht'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy na \mathbb{R}^3 vůči kanonické bázi. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutěž formu.

II) Necht'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy vůči kanonické bázi. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutěž formu.

Oproti předchozímu příkladu řešte nad \mathbb{Z}_2 a \mathbb{Z}_3 (číslo 2 v \mathbb{Z}_2 odpovídá 0).

III) Kvadratická forma g na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 má vzhledem ke kanonické bázi K analytické vyjádření $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$, kde $u = (x, y, z, t)^T$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$X = \{(1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T\}.$$

Určete $g(u)$ pro vektor u , který má vůči bázi X souřadnice $[u]_X = (3, 1, 0, 0)^T$.

IV) Určete signaturu kvadratické formy g na \mathbb{R}^3 , která má pro $u = (x, y, z)^T$ následující analytické vyjádření a) $g(u) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$
b) $g(u) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$