Lineární algebra II - 20.3. CV 3

Pro matici A lze vypočítat A^{-1} pomocí matice adjugované $\mathrm{adj}(A)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

$$\mathrm{adj}(A)_{j,i} = (-1)^{i+j}|M_{i,j}|,$$

kde $M_{i,j}$ vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Pro soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ lze vypočítat $\mathbf{x}$ pomocí Cramerova pravidla

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|},$$

kde matice B_i vznikne z A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{v}$

Absolutní hodnota determinantu je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného jeho sloupcovými vektory.

Mějme $k+1$ bodů $(x_0, y_0)\dots(x_k, y_k)$ s různými x-ovými souřadnicemi. Prochází jimi právě jeden polynom stupně k. Lagranžův interpolační polynom $L(x)$ je způsob, jak tento polynom stupně k získat.

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x)$$

kde

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

I) Spočtěte soustavy pomocí Cramerova pravidla.

a) Řešte v $\mathbb{Z}_5$ soustavu: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

c) Řešte v $\mathbb{Z}_5$ soustavu:

$$\begin{aligned} 2x+y+4z &= 1 \\ 3x+y+4z &= 2 \\ 2x+4y+2z &= 3 \end{aligned}$$

d) Řešte v $\mathbb{Z}_7$ soustavu:

$$\begin{aligned} 3a+4b+c+3d &= 1 \\ a+2b+2c+d &= 0 \\ 2a+b+4c+d &= 6 \\ 4a+3b+c+4d &= 6 \end{aligned}$$

II) Spočtěte inverzní matice pomocí adjugované k následujícím maticím. Řešte nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III) Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

IV) Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}^T = (3,1,1)$, $\mathbf{b}^T = (2,1,1)$ a $\mathbf{c}^T = (2,3,2)$.

(Rovnoběžnostěn obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, kde $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$.)

V) Proložte danými body v rovině interpolační polynom.

a) $(1,-2), (2,2), (-2,2) \in \mathbb{R}^2$

b) $(-1,-9), (1,-3), (2,3) \in \mathbb{R}^2$

c) $(-1, 10), (1, 4), (4, 25) \in \mathbb{R}^2$
d) $(4, 0), (1, 4), (2, 4) \in \mathbb{Z}_5^2$

VI) Spočtěte nad $\mathbb{Z}_5$ následující podíly polynomů.
a) $4x^3 + 3x^2 + 4x + 3 : 2x^2 + 3x + 3$
b) $x^5 + 1 : x + 2$
c) $3x^2 + 2x^2 + 1 : x^2 + 2x + 2$