Lineární algebra II - 26.3. CV 4

Mějme $k+1$ bodů $(x_0, y_0) \dots (x_k, y_k)$ s různými x-ovými souřadnicemi. Prochází jimi právě jeden polynom stupně k. Lagranžův interpolační polynom $L(x)$ je způsob, jak tento polynom stupně k získat.

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x)$$

kde

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Malá Fermatova věta: pro každé prvočíslo p a číslo a, které není násobek p platí:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mod p).$$

O λ řekneme, že je vlastní číslo čtvercové matice A, pokud existuje vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ splňující rovnici $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Vlastní čísla λ_i jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

Vlastní vektory příslušné danému λ_i splňují rovnost $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$, neboli jsou řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Matice řádu n je diagonalizovatelná právě když má n vlastních čísel a prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

I) Proložte danými body v rovině interpolační polynom.

a) $(1, -2), (2, 2), (-2, 2) \in \mathbb{R}^2$

Řešení: $x^2 - 2$

b) $(-1, -9), (1, -3), (2, 3) \in \mathbb{R}^2$

Řešení: $x^2 + 3x - 7$

c) $(-1, 10), (1, 4), (4, 25) \in \mathbb{R}^2$

Řešení: $2x^2 - 3x + 5$

d) $(4, 0), (1, 4), (2, 4) \in \mathbb{Z}_5^2$

Řešení: $x^2 + 2x + 1$

II) Spočtěte nad $\mathbb{Z}_5$ následující podíly polynomů.

a) $4x^3 + 3x^2 + 4x + 3 : 2x^2 + 3x + 3$
Řešení: $2x + 1$
b) $x^5 + 1 : x + 2$
Řešení: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$, zbytek 4
c) $3x^3 + 2x^2 + 1 : x^2 + 2x + 2$
Řešení: $3x + 1$, zbytek $x + 4$

III) Určete, kolik je různých polynomů p stupně nejvýše tři nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ takových, že $p(3) = 2$. Popište všechny takové polynomy.

IV) V tělese $\mathbb{Z}_p$ nalezněte polynom, stupně nejvýše p, který nabývá stejných hodnot.
a) V tělese $\mathbb{Z}_5$, $p(x) = 4x^{20} + 3x^{17} + 2x^{16} + x^{13} + 3x^{12} + 2x^{10} + 4x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x + 3$.
Řešení: $4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$
b) V tělese $\mathbb{Z}_7$, $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.
Řešení: $x^6 + x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

V) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$.
a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$
Řešení: $6(3,2) - 7(2,-3)$
b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
Řešení: $1 + i(1, 1+i); 1 - i(1, 1-i)$
c) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
Řešení: $9(5,2); -5(-1,1)$

VI) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.
a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Řešení: $-1, (1, 1, -1)$ neni diagonalizovatelna

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: $2, (1, 0, 0); 1(1, 0, 1); -1(0, -1, 1)$, je diag

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení: 4(1,1,1); -2,(-2,1,1) (1,-2,1), JE diag

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Řešení: 3,3(1,-2,1); 0(4,4,1), neni diag

Bonus

Řešení:

VII) Určete vlastní čísla matice $K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Řešení: polynom $(2-t)(1-t)^3(1+t)$. Vlastní čísla matice K jsou 2, 1 (trojnásobné) a -1. U matice $H = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$ $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.