Lineární algebra II - 23.4. CV 8

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je definován jako

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$.

Pro vektor $\mathbf{x}$ lze definovat jeho norma pomocí skalárního součinu $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle}$. Euklidovská norma je pro se standartním skalárním součinem.

Nechť vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ svírají úhel α. Pak platí:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$

Speciálně tedy dva vektory jsou kolmé, pokud jejich skalární součin je roven 0.

I) Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3), \mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$
b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2), \mathbf{y}^T = (1, -3, -2)$
c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4), \mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$
d) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4, -1), \mathbf{y}^T = (4, -1, 0, 2)$
e) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i), \mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$
f) $\mathbf{x}^T = (1, 1 + i), \mathbf{y}^T = (2i, a + bi)$ (paramery a, b jsou reálná čísla)

II) Nechť je skalární součin nad $\mathbb{C}^3$ dán předpisem:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$$

Určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ odvozené ze skalárního součinu

3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3), \mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$
b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2), \mathbf{y}^T = (1, -3, -2)$
c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4), \mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$
d) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4), \mathbf{y}^T = (4, -1, 0)$
e) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i), \mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$

III) Aniž byste dopočítávali integrál, ukažte, že pro libovolná $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0, r > 0$ mají funkce $f_a(x) = \sin(ax)$ a $g_b(x) = \cos(bx)$ nulový skalární součin, t.j. jsou na sebe v odpovídajícím vektorovém prostoru kolmé.

Tento součin je dán předpisem: $\langle f_a | g_b \rangle = \int_{-r}^{r} f_a(x) g_b(x) dx$.

IV) Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$. Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

V) Nechť $\|\mathbf{u}\| = 12, \|\mathbf{v}\| = 5$. Navíc $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$. Určete $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

VI) Nechť $\|\mathbf{u}\| = 13, \|\mathbf{v}\| = 19, \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 24$. Určete $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Všimni si, že zadání splňuje trojúhelníkovou nerovnost.

VII) Nechť $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Navíc $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$. Tedy jsou na sebe kolmé. Určete α tak, že vektory $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ svírají úhel $\pi/6$.

VIII) Určete úhel mezi dvojicemi vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus). Rozhodněte, jestli jde o úhel ostrý nebo tupý:

a) $\mathbf{x} = (1, -4)^T, \mathbf{y} = (8, 2)^T$
b) $\mathbf{x} = (3, 2, -2)^T, \mathbf{y} = (0, 4, 1)^T$
c) $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T, \mathbf{y} = (1, 0, -1)^T$
d) $\mathbf{x} = (3, 4)^T, \mathbf{y} = (-1, 0)^T$