1 Barevnost

Příklad 1:

Ukažte, že graf obsahující spár ($K_{1,3}$) jako indukovaný podrgaf není linegraph. Dále ukažte, že zakázání spáru není postačující pro to být linegraph. Jínými slovy najděte graf, který je spáruprostý a přitom není linegraph.

Nápověda:

Řešení:

Stačí zkusit, že samotný spár není linegraph.
Trojúhelníkový pásek na šesti vrcholech.

Příklad 2:

Dokažte, že každý bipartitní graf G je Vizingovy třídy I. Jednodušší verze - regulární bipartitní graf.

Nápověda:

Pro jistotu připomeňme, že Vizingova třída I. znamená, že $\chi(L(G)) = \Delta(G)$. *Užijte párování.*

Řešení:

Graf převedeme na $\Delta(G)$-regulární bipartitní graf G' přidáním hran a případných dalších vrcholů. V G' nalezneme $\Delta(G)$ hranově disjunktních perfektních párování (užití Hallovy věty). Každému párování přiřadíme barvu a obarvíme tak hrany G' a tím i hrany G, neb G je podgraf G'.

Příklad 3:

Dokažte, že každý rovinný kubický graf bez mostů je Vizingovy třídy I.

Nápověda:

Vzpomeňte na větu o 4 barvách.

Řešení:

Mějme rovinný kubický graf bez mostů G. Chceme mu obarvit hrany pomocí tří barev a, b, c. Z věty o 4 barvách obarvíme vrcholy pomocí barev 1,2,3 a 4. Hrana dostane barvu podle toho, jaké má konce. $a = \{12, 34\}, b = \{13, 24\}, c = \{14, 23\}$.

Příklad 4:

Určete hranovou barevnost Petersenova grafu.

Nápověda:

Petersen, má barevnost 4 (tedy je třídy II.)

Řešení:

Pokud je graf Vizingovy třídy I, pak existuje rozklad hran na 3 perfektní párování takový, že doplněk každého párování je disjunktní sjednocení sudých kružnic. Pokud Ukážeme, že doplněk každého párování obsahuje lichou kružnici, ukázali jsme, že graf je Vizingovy třídy II.
Petersen má 15 hran. Nejmenší kružnice má délku 5. Vezměme nějaké párování. Pokud jeho doplňkem jsou dvě kružnice, musí mít obě délku 5 a tudíž jsou liché. Pokud by byla

jen jedna, je to Hamiltonovská kružnice a tu Petersenův graf nemá. Tedy Petersen je Vizingovy třídy II.