

1 Perfektní grafy

Příklad 1:

Ukažte, že line graf bipartitního grafu je perfektní.

Nápověda:

Řešení:

Ověření z definice, plus Vizingova věta na barvení hran a že maximální stupeň je maximální klika v line grafu.

Příklad 2:

Nechť V je množina prvků, na které je definované částečné uspořádání R . Odpovídající comparability graf má množinu vrcholů V a dva vrcholy jsou spojené hranou, pokud odpovídající prvky jsou porovnatelné v R . Ukažte, že comparability grafy jsou perfektní.

Nápověda:

Částečné uspořádání má řetězce a antiřetězce.

Řešení:

Maximální řetelec tvoří maximální kliku. Vrchol obarvím podle délky nejdelšího řetězce, který v něm končí.

Příklad 3:

Split graf je graf, jehož vrcholy lze rozložit na dvě množiny, kde jedna indukuje kliku a druhá nezávislou množinu. Ukažte, že split grafy jsou perfektní.

Nápověda:

Najít největší kliku a dobarvit zbytek.

Řešení:

Klikovost je podle té množiny, co dělá kliku. A dobarvit nezávislou lze snadno, protože pro každý z nezávislé je jeden vrchol z kliky s nímž není spojený (jinak by šel do té kliky přihodit).

Příklad 4:

Dokažte, že graf G je perfektní právě tehdy když každý jeho indukovaný podgraf H obsahuje nezávislou množinu I že,

$$\omega(H - I) < \omega(H).$$

Jinými slovy nezávislá obsahuje vrchol z každé maximální kliky.

Nápověda:

Řešení:

Pokud je graf perfektní, tak ho obarvím. Libovolná barevná třída si musí sáhnout do každé maximální kliky, protože barevnost je klikovost.

Na druhou stranu lze pomocí I rozložit celý graf na nejvýše $\omega(G)$ nezávislých množin, které udělají kýžené obarvení.

Příklad 5:

Nechť G je perfektní graf. Graf G_x vznikne z G nahrazením vrcholu x jiným perfektním grafem H . Operace nahrazení vyhodí vrchol x a každý vrchol z H spojí s každým sousedem x . Dokažte, že graf G_x je také perfektní.

Nápověda:

Použijte předchozí cvičení.

Řešení:

Vezmu obarvení G . Nechť x patří do barvy A . Nechť B je nějaká množina vrcholů stejné barvy v H . Pak hledaná nezávislá sahající do všech maximálních klik je $A \setminus \{x\} \cup B$. Trochu se rozebere, kde je v G_x maximální klika a je to.
