

Lineární algebra II - 13.3. CV 3

Pro matici A lze vypočítat A^{-1} pomocí matice adjugované $\text{adj}(A)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$\text{adj}(A)_{j,i} = (-1)^{i+j} |M_{i,j}|,$$

kde $M_{i,j}$ vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Pro soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ lze vypočítat \mathbf{x} pomocí Cramerova pravidla

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|},$$

kde matice B_i vznikne z A nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{v}

Absolutní hodnota determinantu je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného jeho sloupcovými vektory.

I) Spočítejte soustavy pomocí Cramerova pravidla.

a) Řešte v \mathbb{Z}_5 soustavu:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Řešte v \mathbb{R} soustavu:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Řešte v \mathbb{Z}_5 soustavu:

$$2x + y + 4z = 1$$

$$3x + y + 4z = 2$$

$$2x + 4y + 2z = 3$$

d) Řešte v \mathbb{Z}_7 soustavu:

$$3a + 4b + c + 3d = 1$$

$$a + 2b + 2c + d = 0$$

$$2a + b + 4c + d = 6$$

$$4a + 3b + c + 4d = 6$$

II) Spočítejte inverzní matice pomocí adjugované k následujícím maticím.
Řešte nad \mathbb{R} a \mathbb{Z}_5 .

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III) Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

IV) Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

V) Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}^T = (3, 1, 1)$, $\mathbf{b}^T = (2, 1, 1)$ a $\mathbf{c}^T = (2, 3, 2)$.

(Rovnoběžnostěn obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, kde $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$.)